4°MATH.

COURS.

1.

NOMBRES COMPLEXES.

V- EQUATIONS DE SECOND DEGRE.

1°- Racines carrées d'un nombre complexe.

2°- Equations de 2°degré.

IV-EQUATIONS DE DEGRE >2.

1°- Racines n-ième d'un nombre complexe.

2°- Equations de 3°degré.

V. Equations De 2° degré

1°/ Racines carrées d'un nombre complexe ⇈

Définition
Soit Z un nombre complexe, on appelle racine carrée de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.

Cas particulier
Si Z = 0 alors ($z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$) donc 0 est l'unique racine carrée de 0.
Tout nombre complexe non nul possède deux racines carrés opposées.

Méthodes pratiques de recherche des racines carrées d'un nombre complexe :

A/ Méthode algébrique

La technique sera éclairée à l'aide de
L'**exemple** : Trouver les racines carrées de 4+3i,
Revient à résoudre l'équation $z^2 = 4+3i$.
Soit $z^2=4+3i$ et on cherche $z = a + ib$, $a, b\in\mathbb{R}$.
Il faut donc que $(a+ib)^2 = 4+3i \Leftrightarrow a^2+2iab-b^2=4+3i$ (avec $a^2, b^2\in\mathbb{R}$)
Or deux complexes sont égaux lorsque leur partie réelle et imaginaire sont égales chacune a chacune.
Ainsi, $a^2-b^2=4$ (parties réelles) et $2ab=3$ (parties imaginaires)
Par ailleurs, $|z|=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow |z|^2=a^2+b^2$.
Or, $z^2=4+3i$ donc $|4+3i|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ donc $|z|^2=5\Leftrightarrow a^2+b^2=5$.

On a donc un système a trois équations $\begin{cases} a^2-b^2=4 \\ a^2+b^2=5 \\ 2ab=3 \end{cases}$

✔ Si on ajoute la première ligne a la deuxième, on obtient $2a^2=9\Leftrightarrow a^2=9/2$ donc $a=\pm 3/\sqrt{2}$.
✔ Si on retranche la première ligne de la deuxième, on obtient $2b^2=5-4\Leftrightarrow b^2=1/2$ donc $b=\pm 1/\sqrt{2}$.
Alors, 4 combinaisons sont possibles: $(3/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$, $(-3/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$, $(3/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})$, $(-3/\sqrt{2};-1/\sqrt{2})$.
Or, il faut que $2ab=3$. On peut donc éliminer les combinaisons 2 et 3.
On a donc deux solutions: $z= (3/\sqrt{2} +i/\sqrt{2})$ et $z= (-3/\sqrt{2} -i/\sqrt{2})$
Soit : $\frac{3+i}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-3-i}{\sqrt{2}}$ sont les racines carrées de (4+3i)

CCL :
Soit Z= a+ib un nombre complexe non nul donné.
Pour déterminer les racines carrées de Z on résoudra le système en x et y
Suivant : $\begin{cases} x^2-y^2=a=Ré(Z) \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}=|Z| \\ 2xy=b=Im(Z) \end{cases}$

Cas particuliers à retenir :

- ✓ Z= 2i une racine carrés de Z est z=1+i en effet $(1+i)^2=2i$
- ✓ Z= -2i une racine carrés de Z est z=1-i en effet $(1-i)^2=-2i$
- ✓ Z=α, α∈$\mathbb{R}+^*$. Une racine carrée de Z est z=$\sqrt{\alpha}$
- ✓ Z=α, α∈$\mathbb{R}-^*$. Une racine carrée de Z est z= $i\sqrt{-\alpha}$.

  Exemple: Z=-3, alors z=i$\sqrt{3}$

B/ Méthode exponentielle

Cette méthode utilise la forme exponentielle du nombre complexe.
Elle est souvent utilisée pour les nombres complexes dont on connait leurs arguments.
La technique sera éclairée à l'aide de
L'**exemple** : Trouver les racines carrées dei,
Revient à résoudre l'équation $z^2 = 4i$.
On pose $z = r.e^{i\alpha} \Leftrightarrow z^2 = r^2.e^{2i\alpha}$
$z^2 = i \Leftrightarrow r^2\, e^{2i\alpha} = 4i = 4e^{i\pi/2}$
$\Leftrightarrow R^2 = 4$ et $2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, k entier.
$\Leftrightarrow r=2$ et $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, k∈ $\mathbb{Z}$ (précisément pour k=0 et k=1)
On aura donc deux racines carrées de 4i qui sont :
$2e^{i\pi/4}$ et $2e^{i5\pi/4}$.

CCL :
Soit $Z=R.e^{i\alpha}$ un nombre complexe non nul de module R>0 et d'argument α∈ $\mathbb{R}$.
Pour déterminer les racines carrées de Z on résoudra le système en r etθ
Suivant : $\begin{cases} r^2 = R \\ 2\theta = \alpha + 2k\pi, k \in \{0,1\} \end{cases}$

2°/ Equation du second degré. ⇈

Une équation de second degré à coefficients complexes est de la forme :
$a.Z^2 + b.Z + c = 0$ où a≠ 0, b et c sont dans $\mathbb{C}$; et Z inconnu.
Elle se résout de la même façon que dans IR, avec une petite différence lorsqu'on calcule δ une racine carrée du discriminent $\Delta=b^2-4ac$.

CCL :
(E) : $a.Z^2 + b.Z + c = 0$
On calcule Δ puis on chercheδ.
Les solutions de l'équation(E) sont :
$Z' = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $Z'' = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Remarque :

- ✓ Si a, b et c des réels et$\Delta \in IR+$, alors : Z' et Z'' sont réelles.
- ✓ Si a, b et c des réels et$\Delta \in \mathrm{IR}-$, alors : Z' et Z'' sont conjuguées.
- ✓ Z' et Z'' vérifient : Z'+Z''=-b/a et Z'.Z''=c/a.

V. Equations De degré >2

1°/ Racines n-ième d'un nombre complexe. ⇈

Définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soit $Z \in \mathbb{C}$, on appelle racine nième du nombre complexe Z, tout nombre complexe z vérifiant : $z^n = Z$.

Remarques

· Si Z = 0 alors ($z^n = 0 \Leftrightarrow z = 0$) $\Leftrightarrow$ 0 est l'unique racine nième de 0.

· Si $Z \in \mathbb{C}^*$ alors $Z = [r,\theta]$

Z admet exactement n racines nièmes distinctes: $Z_k = [\sqrt[n]{r}, \frac{\theta+2k\pi}{n}]$;

$k \in \{0,1,..,n-1\}$

Exemples

· Déterminer les racines quatrièmes de $Z = -8 + 8i\sqrt{3}$. Représenter les points images des solutions dans P $(O,\vec{u},\vec{v})$

· Déterminer les racines cubiques de l'unité

Remarque :

Les points images respectifs des n racines nièmes d'un nombre complexe non nul $Z = [r,\theta]$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$

· La somme des n racines nièmes de l'unité est nulle :

· On obtient toutes les racines nièmes d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une d'elles successivement par les racines nièmes de l'unité.

Exercice

Calculer $(2 + i)^3$. En déduire les racines cubiques de Z = 2 + 11i.

2°/ Equations de 3° degré. ⇈

Propriété

Soit P(z) un polynôme complexe de degré n.

Si a est une solution de l'équation P(z) = 0 alors P(z) = (z - a).Q(z)

Où Q(z) est un polynôme complexe de degré (n – 1).

Exemple.

Soit $P(z) = z^3 - (5 + i)z^2 + 4(2 - i)z - 12 + 4i$.

· Vérifier que P(-2i) = 0

· Factoriser P(z)

· Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z) = 0.

Méthode.

Pour résoudre une équation de 3°degré ($aZ^3+bZ^2+cZ+d=0$) :

. Avoir une racine (solution) particulière Z_0.

. Factoriser (aZ^3+bZ^2+cZ+d) sous la forme $(Z-Z_0)$ $(\alpha Z^2+\beta Z+\gamma)$

. Déduire les solutions de l'équation.